



Katrin Pröbß (Autor)

# **Untersuchung von Energie- und Massespeicherungsvorgängen in Pkw-Kälteanlagen**



<https://cuvillier.de/de/shop/publications/1055>

Copyright:

Cuvillier Verlag, Inhaberin Annette Jentsch-Cuvillier, Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen,  
Germany

Telefon: +49 (0)551 54724-0, E-Mail: [info@cuvillier.de](mailto:info@cuvillier.de), Website: <https://cuvillier.de>

# Kapitel 2

## Thermodynamische und strömungstechnische Grundlagen

Nachfolgend werden die physikalischen Grundlagen erläutert, auf denen die im späteren Verlauf der Arbeit vorgestellten Modelle basieren. Zunächst werden die strömungstechnischen Basisgleichungen der Energie-, Masse- und Impulserhaltung vorgestellt und auf die eindimensionale Fluidströmung reduziert. Anschließend wird die thermodynamische Beschreibung des Arbeitsmediums erläutert. Es folgen die Grundlagen der Wärme- und Stoffübertragung, die zur Beschreibung der Luftentfeuchtung im Verdampfer benötigt werden und verwendete Korrelationen auf der Kältemittelseite. Abschließend wird die theoretische Basis für eine Modellierung der Zweiphasenströmung erläutert.

### 2.1 Erhaltungsgleichungen

Für die Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik existieren mehrere gleichwertige Darstellungsformen, deren Wahl sich nach ihrer Verwendung richtet. Für die *Finite-Volumen-Methode*, die in dieser Arbeit in eindimensionaler Form zum Einsatz kommt, wird eine über ein endliches Kontrollvolumen integrierte Form angewendet. Die Erhaltungsgleichungen lassen sich aus grundlegenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten ableiten, die sich auf ein Fluidelement beziehen, das sich mit der Geschwindigkeit  $w$  durch den Raum bewegt (Herwig, 2002). In diesem Fall werden als Fluidelement die Teilchen zusammengefasst, die sich zum Zeitpunkt  $t$  in dem Kontrollvolumen KV mit dem Volumen  $V(t)$  befinden. Die Masse dieses Fluidelementes  $m$  bleibt erhalten, also gilt

$$\frac{Dm}{Dt} = 0. \quad (2.1)$$

Mit  $\frac{Dm}{Dt}$  wird dabei die totale Ableitung nach der Zeit in der teilchenfesten oder *Lagrang'schen* Betrachtungsweise bezeichnet. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik führt zur Energieerhaltung, nach der die Änderung der Energie  $E$  eines Fluidelementes der Summe aller übertragenden Wärmeströme  $\dot{Q}$  und der pro Zeiteinheit verrichteten Arbeit  $P$  ist.

$$\frac{DE}{Dt} = \sum_{V(t)} \dot{Q} + \sum_{V(t)} P \quad (2.2)$$

Die Impulserhaltung folgt dem Newtonschen Axiom der Mechanik, nach dem die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers gleich der Summe aller an ihm angreifenden Kräfte ist,

$$\frac{DI}{Dt} = \sum_{V(t)} \mathbf{F}. \quad (2.3)$$

Im Gegensatz zu der Lagrange-Betrachtung, die einem Fluidelement auf seinem Weg durch den Raum folgt, ist für die Verwendung in der Finiten-Volumen-Methode eine ortsfeste Betrachtung eher geeignet. Diese Form der Erhaltungsgleichungen wird auch als *Eulersche* Betrachtungsweise bezeichnet und lässt sich mit Hilfe des *Reynoldschen Transporttheorems* in Gleichung 2.4 aus der Lagrange-Form bilden. Es drückt aus, dass die zeitliche Änderung einer beliebigen mit dem Massenstrom transportierten Größe  $\Phi$  in der teilchenfesten Betrachtung gleich seiner zeitlichen Änderung in einem ortsfesten Kontrollvolumen zusätzlich der Differenz der ein- und austretenden Ströme dieser Größe über die Oberfläche des Kontrollvolumens ist. Für eine mathematische Herleitung sei z.B. auf (Spurk, 2007) verwiesen.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \Phi dV = \int_V \frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial t} dV + \int_A (\rho \Phi) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.4)$$

In Gleichung 2.4 ist  $V$  ein ortsfestes Kontrollvolumen mit unveränderlichen Grenzen, dass zum Zeitpunkt  $t$  mit dem Volumen  $V(t)$  zusammenfällt. Mit dem Einheitsvektor  $\mathbf{n}$  normal zur Oberfläche  $A$  (nach außen positiv) beschreibt das Skalarprodukt  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$  den Anteil des Geschwindigkeitsvektors, der senkrecht zur Oberfläche steht. Angewendet auf die Erhaltungsgleichungen 2.1-2.3 und mit geeigneten Modellannahmen werden in den folgenden Abschnitten Massen-, Energie- und Impulsbilanzen für ein ortsfestes endliches Kontrollvolumen aufgestellt. In einem weiteren Schritt erfolgt die Anwendung auf ein quasi-eindimensionales Volumenelement mit einem veränderlichen Strömungsquerschnitt, wie es in Abbildung 2.1 skizziert ist. Darin ist  $w$  die mittlere Geschwindigkeit über den Strömungsquerschnitt  $A$ . Die Indizes  $e$  und  $a$  bezeichnen Größen am Ein- bzw. Austritt des Kontrollvolumens.

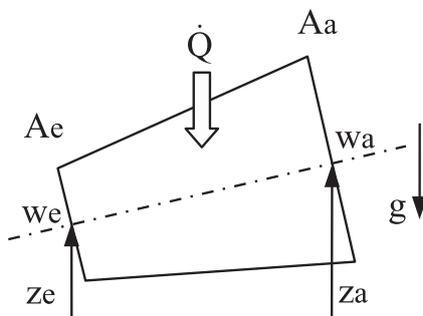


Abbildung 2.1: Durchströmtes Volumen mit einem sich ändernden Strömungsquerschnitt

### 2.1.1 Massenerhaltung

Mit  $\Phi = 1$  entspricht der linke Term in Gl. (2.4) der zeitlichen Massenänderung in einem teilchenfesten Volumen

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho dV = \frac{Dm}{Dt} \quad (2.5)$$

Aus Gl. 2.1 und Gl. 2.4 folgt daher für  $\Phi=1$  die Massenerhaltung für ein ortsfestes Volumen mit

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (2.6)$$

Darin kann der erste Term als zeitliche Änderung der Gesamtmasse  $m$  in dem betrachteten Kontrollvolumen bezeichnet werden, der zweite Term beschreibt die ein- und austretenden Massenströme. Für das in Abbildung 2.1 skizzierte Kontrollvolumen folgt somit unter der Annahme, dass  $w$  senkrecht auf  $A$  steht

$$\frac{dm}{dt} = (\rho w A)_e - (\rho w A)_a \quad (2.7)$$

mit der Definition des Massenstromes

$$\dot{m} \equiv \rho w A. \quad (2.8)$$

Im stationären Fall ( $dm/dt = 0$ ) wird Gl. (2.7) auch als *Kontinuitätsgleichung* bezeichnet. Allgemein formuliert für ein beliebiges Kontrollvolumen mit  $N$  ein- oder austretenden Massenströmen gilt

$$\frac{dm}{dt} = \sum_{i=1}^N \dot{m}_i \quad (2.9)$$

Eintretende Massenströme besitzen dabei ein positives, austretende Massenströme ein negatives Vorzeichen. Fluide, die aus  $k$  Komponenten bestehen, erhöhen die Anzahl der Massenbilanzen auf eine pro Spezies bzw.  $k - 1$  zusätzlich zu einer Gesamtbilanz.

## 2.1.2 Impulsbilanz

Die zeitliche Änderung des Impulses in einem teilchenfesten Volumen entspricht der linken Seite von Gl. 2.4 wenn für  $\Phi$  der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{w}$  eingesetzt wird.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{w} dV = \frac{D\mathbf{I}}{Dt} \quad (2.10)$$

Damit folgt für die ortsfeste Betrachtungsweise aus Gl. 2.4 die Impulserhaltung zu

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{w})}{\partial t} dV + \int_A \rho \mathbf{w} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dA = \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_A \quad (2.11)$$

Da Kräfte und Geschwindigkeiten in Vektorform vorliegen, entspricht Gleichung 2.11 tatsächlich drei skalaren Gleichungen in den drei kartesischen Raumkoordinaten. Die rechte Seite der Gleichung setzt sich aus Volumen- und Oberflächenkräften ( $\mathbf{F}_V$  bzw.  $\mathbf{F}_A$ ) zusammen. Als Volumenkraft sei hier nur der Einfluss des Schwerkraftfeldes genannt. Weitere mögliche Einflüsse, die auf das gesamte Volumen wirken, wie. z.B. elektromagnetische Kräfte, bleiben unberücksichtigt.

$$\mathbf{F}_V = \mathbf{F}_g = \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (2.12)$$

Die Oberflächenkräfte ergeben sich aus dem Produkt des jeweiligen Oberflächenelementes und der darauf wirkenden Schub- und Normalspannungen. Der Spannungstensor  $\mathbf{T}$  für ein infinitesimales quaderförmiges Element enthält 9 Komponenten für die Verknüpfung der Flächennormalen mit den Kraftwirkungslinien jeweils in den drei Raumkoordinaten. Die integrale Formulierung der resultierenden Oberflächenkräfte lautet

$$\mathbf{F}_s = \int_A \mathbf{T} \mathbf{n} dA \quad (2.13)$$

Anschaulich lassen sich die Oberflächenkräfte auf viskose Scherkräfte und Strömungsturbulenzen zurückführen. Eine mathematische Verknüpfung der einzelnen Komponenten des Spannungstensors mit dem vorherrschenden Geschwindigkeitsfeld wird durch einen geeigneten Ansatz, z.B. für ein Newtonsches Fluid oder ein Turbulenzmodell hergestellt. Zu beachten ist, dass

der durch den thermodynamischen Druck verursachte Anteil der Normalspannungen, also der Anteil, der bei einem ruhenden Fluid nicht zu Null wird, in  $\mathbf{T}$  nicht berücksichtigt und separat aufgeführt wird (Gl. 2.14). Dabei ist die aus dem Druck resultierende Kraft stets der Flächennormalen entgegengerichtet.

$$\mathbf{F}_p = \int_A -p\mathbf{n} dA \quad (2.14)$$

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_p \quad (2.15)$$

In Systemsimulationen mit eindimensionalen Strömungsansätzen wird häufig die Impulsbilanz in einer Raumkoordinate verwendet, z.B. in (Tummescheit, 2002), (Elmqvist u. a., 2003) und (Pfafferott, 2005). Dies ist jedoch nur unter bestimmten Voraussetzungen physikalisch korrekt, wie im Folgenden erläutert werden soll. Für das Strömungselement in Abbildung 2.1 folgt jedoch zunächst mit den Gleichungen 2.11-2.15 in der Raumkoordinate der Hauptströmungsrichtung  $x$ :

$$\frac{dI_x}{dt} = (\dot{m}w)_e - (\dot{m}w)_a + (pA)_e - (pA)_a + \frac{z_a - z_e}{\Delta x} gm + F_{s,x} \quad (2.16)$$

Dabei ist  $z_a - z_e$  der Höhenunterschied der Strömungsmitte zwischen Aus- und Eintritt,  $g$  die Erdbeschleunigung und  $w$  die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung. Der letzte Term in Gl. 2.16 kann jedoch nicht ohne weiteres ausgewertet werden, da die Geschwindigkeitsterme senkrecht zur Hauptströmungsrichtung in der eindimensionalen Betrachtungsweise keine Berücksichtigung finden. Ändert sich der Strömungsquerschnitt nicht, entspricht der Term den durch die Wandreibung hervorgerufenen Kräften auf die Oberfläche des Volumenelementes, hat also einen reinen dissipativen Charakter. Bei einer Querschnitts- oder Richtungsänderung beinhaltet der Term jedoch auch die Normalkräfte auf die jeweiligen Flächen und kann in der eindimensionalen Betrachtung nicht aufgelöst werden.

In ausgebildeten Strömungen, d.h. Strömungen in denen sich das Geschwindigkeitsprofil im weiteren Verlauf der Strömung nicht mehr ändert, kann aus einer Kräftebilanz ein direkter Zusammenhang zwischen dem Reibungswiderstand der Rohrwand, der aus den dortigen Scherspannungen resultiert und dem Druckverlust über die freien Strömungsflächen hergestellt werden. Das bedeutet aber auch, dass Strömungsquerschnitt und Dichte des Mediums über die Lauflänge konstant sind. Dann kann eine Rohrreibungszahl (Herwig, 2002)  $\lambda_R$  wie folgt definiert werden.

$$\lambda_R = \frac{2D_h}{\rho w^2} \frac{(-dp)}{dx} \quad (2.17)$$

Darin ist

$$D_h = \frac{4A}{U} \quad (2.18)$$

der hydraulische Durchmesser mit dem Umfang des Strömungsquerschnittes  $U$  und der Querschnittsfläche  $A$ . Integriert über die Lauflänge  $l = x_2 - x_1$  folgt damit für den Zusammenhang zwischen Massenstrom und Druckverlust aufgrund von Wandrauigkeiten

$$\Delta p_{\text{diss}} = \lambda_R \frac{\dot{m}^2 l}{2\rho D_h A^2}. \quad (2.19)$$

Die Rohrreibungszahl  $\lambda_R$  wird in Abhängigkeit der Reynoldszahl und der Rohrrauigkeit anhand von Korrelationen aus der Literatur bestimmt (Vdi06, 2006; Bohl, 2005). Empirisch bestimmte Widerstandsbeiwerte können in ähnlicher Form wie in Gleichung 2.19 für Einzelwiderstände, z. B. Rohrumlenkungen oder plötzliche Querschnittsänderungen verwendet werden:

$$\Delta p_{\text{diss}} = \zeta \frac{\dot{m}^2}{2\rho A^2} \quad (2.20)$$

Die Widerstandsbeiwerte  $\zeta$  werden in hydrodynamisch und thermisch voll ausgebildeten An- und Abströmungen einzelner Komponenten experimentell bestimmt und vertafelt, siehe z.B. (Idelchik, 1994). Dabei ist zusätzlich angegeben, auf welche Querschnittsfläche  $A$  in Gl. (2.20) sich der Widerstandsbeiwert bezieht. Bei einer Aneinanderreihung von Einzelwiderständen bildet sich in der Realität die Strömung eventuell nicht voll aus, und diese Tatsache sollte in der Interpretation der Berechnungsergebnisse berücksichtigt werden.

Die in dieser Arbeit verwendeten Modelle enthalten die Impulserhaltung reduziert auf eine algebraische Beziehung zwischen Reibungsdruckverlust und Massenstrom. Daher wird diese in den folgenden Kapiteln allgemein als Bewegungsgleichung bezeichnet. Physikalisch entspricht dies einer quasistatischen Betrachtung, da die zeitliche Änderung des Impulses deutlich schneller ist, als die Änderungen von Druck und Temperatur. In früheren Modellen (Pfafferott, 2005; Tummescheit, 2002) für ähnliche Anwendungen wurde die komplette Impulsbilanz verwendet. Dies führt zu Gleichungssystemen, die sich in der Regel leichter initialisieren lassen, da der Massenstrom als numerischer Zustand vorgegeben wird. Sie erhöhen jedoch den Rechenaufwand und machen das Gleichungssystem anfälliger für Schwingungen.

### 2.1.3 Energieerhaltung

Die Änderung der Energie in einem teilchenfesten Volumen entspricht dem linksseitigen Term in Gl. 2.4, wenn  $\Phi = e$  gesetzt wird.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho e dV = \frac{DE}{Dt} \quad (2.21)$$

Die spezifische Energie  $e$  setzt sich dabei aus der spezifischen inneren Energie  $u$  und der kinetischen Energie des Fluidelementes zusammen.

$$e = u + \frac{\mathbf{w}^2}{2} \quad (2.22)$$