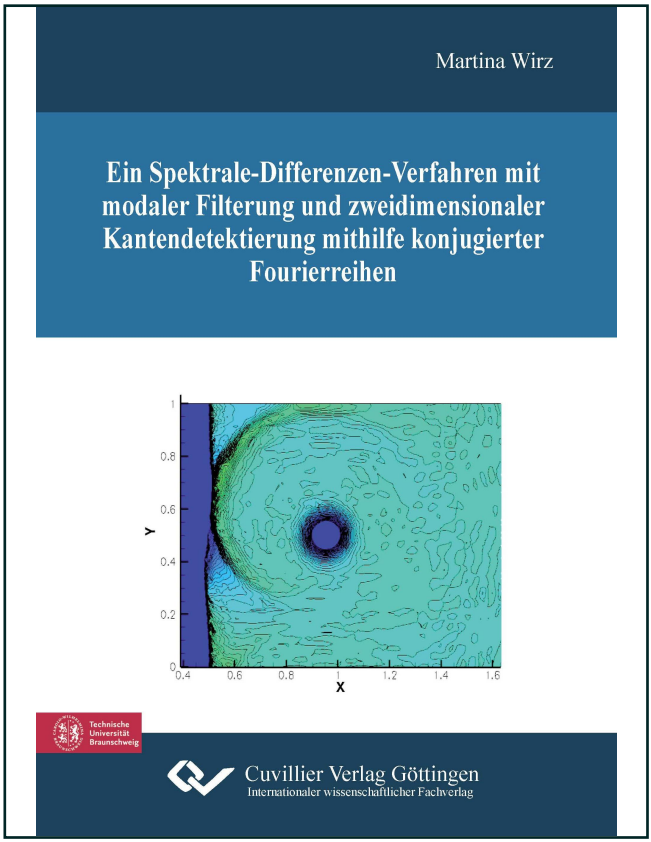
Martina Wirz (Autor)

Ein Spektrale-Differenzen-Verfahren mit modaler Filterung und zweidimensionaler Kantendetektierung mithilfe konjugierter Fourierreihen



https://cuvillier.de/de/shop/publications/6157

Copyright:
Cuvillier Verlag, Inhaberin Annette Jentzsch-Cuvillier, Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen, Germany
Telefon: +49 (0)551 54724-0, E-Mail: info@cuvillier.de, Website: https://cuvillier.de

1 Einleitung

Zahlreiche Phänomene in den Natur- und Ingenieurswissenschaften werden durch Systeme partieller Differentialgleichungen und insbesondere hyperbolischer Erhaltungsgleichungen modelliert, für die im Allgemeinen keine exakte Lösung bekannt ist und somit eine numerische Lösung bestimmt werden muss. Eine zusätzliche Schwierigkeit für die zahlreichen numerischen Lösungsverfahren besteht darin, dass die Lösungen der zeitabhängigen hyperbolischen Erhaltungsgleichungen Unstetigkeiten besitzen können sowie nicht eindeutig bestimmt sein müssen. Das in dieser Arbeit untersuchte Verfahren ist die relativ junge Spektrale-Differenzen-Methode, die sich insbesondere durch ihre einfache Formulierung und hohe Genauigkeit auszeichnet. Diese Methode basiert auf einer Zerlegung des Lösungsgebiets in einzelne Zellen, in denen der Fluss mithilfe (polynomieller) Ansatzfunktionen rekonstruiert und zur Aktualisierung der Lösung an diskreten Punkten genutzt wird. Dadurch ist sie leicht auf hohe Ordnungen, das heißt in diesem Kontext hohe Polynomgrade, erweiterbar.
Der Gebrauch von Polynomen hoher Ordnung hat den Vorteil, dass eine genaue Approximation auch bei gröberen Gittern möglich ist und der Fehler der numerischen Lösung exponentiell mit der Anzahl der Unbekannten fallen kann (abhängig von der Glattheit der Lösung), während er bei einer Gitterverfeinerung nur linear fällt. Somit sind bei Verfahren erster Ordnung wesentlich mehr Freiheitsgrade nötig, um dieselbe Konvergenzordnung zu erzielen. In der Nähe von Unstetigkeitsstellen treten bei beiden Ansätzen typische Probleme auf: Verfahren erster Ordnung verschmieren die Sprungunstetigkeiten, während Verfahren höherer Ordnungen den Sprung zwar scharf lokalisieren, aber aufgrund des Gibbs-Phänomens oszillieren. Diese Oszillationen müssen behoben werden, wenn die zeitliche Entwicklung der numerischen Lösung nicht zu sehr beeinträchtig und damit instabilisiert werden soll.
Ein klassischer Ansatz dafür ist der Gebrauch von Limitern. Diese sorgen dafür, dass zwar abseits von Unstetigkeitsstellen ein Fluss beziehungsweise eine Rekonstruktion hoher Ordnung genutzt wird, aber in der Nähe von Sprungstellen auf erste Ordnung limitiert wird. Ein Nachteil ist dabei, dass die Konvergenzordnung dann auch global abfällt, da durch die Limiter alle Informationen hoher Ordnung beseitigt werden.
Um die hohe Ordnung auch global in der Anwesenheit von Unstetigkeitsstellen zu erhalten, erwiesen sich modale Filter als vielversprechendes Hilfsmittel. Diese Filter modifizieren die hochfrequenten Koeffizienten einer Reihenentwicklung und erhalten somit die Informationen in den hohen Frequenzen, vermindern gleichzeitig aber die daraus enstehenden Oszillationen. Dabei kann die hohe Ordnung, wie in mehreren Anwendungen festgestellt wurde, weitestgehend erhalten bleiben, wenn geeignete Filter und Parameter gewählt werden. Dies führt auf die Frage, welche Filter zur Modifikation geeignet sein könnten. Ein hilfreicher Zusammenhang ist dabei die Tatsache, dass die Filterung mit einem speziellen Exponentialfilter und anschließender Lösung der inviskosen Erhaltungsgleichung äquivalent zur Lösung einer *viskosen* Erhaltungsgleichung ist. Für diese

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

viskose Formulierung wurde im Kontext spektraler Verfahren, die auf einer Fourier-Reihenentwicklung basieren, ein Konvergenzresultat für bestimmte Parameter erzielt, so dass daraus auch Rückschlüsse auf die Filterparameter möglich sind. Diese modalen Exponentialfilter wurden auch auf ein Diskontinuierliche-Galerkin-Verfahren mit Proriol-Koornwinder-Dubiner-Polynomen (kurz PKD-Polynome) übertragen und lieferten vielversprechende Ergebnisse, so dass in dieser Arbeit die modale Filterung im Rahmen eines auf PKD-Polynome erweiterten Spektrale-Differenzen-Verfahrens untersucht wird.

Um die vorgestellten Filter auch effizient zu verwenden, bedarf es einer möglichst genauen Lokalisierung der auftretenden Unstetigkeitsstellen, da eine zu grobe Filterung die Lösung unnötig verschmiert und die Ordnung in der Nähe der Unstetigkeiten reduziert. Für eine solche Kantendetektierung können verschiedene Ansätze genutzt werden. In dieser Arbeit wird neben einem bekannten, auf lokalen Verfahren erprobten Indikator basierend auf dem Abklingverhalten der PKD-Koeffizienten, auch eine Detektierungsmöglichkeit mithilfe konjugierter Fourierreihen untersucht. Aus einer Raumdimension ist bekannt, dass die konjugierten Fourier-Partialsummen gegen die Sprunghöhe der zugrunde liegenden Funktion konvergieren. Da sowohl der Ort als auch die Höhe der Unstetigkeit erkannt wird, bietet sich diese Tatsache besonders als Stoßindikator an. Nachteilig ist aber die langsame Konvergenz der konjugierten Partialsummen, so dass verallgemeinerte konjugierte Partialsummen eingeführt wurden, die aus der Faltung von sogenannten zulässigen Kernen mit der zugrunde liegenden Funktion entstehen und eine schnellere Konvergenzrate abseits der Unstetigkeitsstellen aufweisen. Dieses Detektierung im Kontext spektraler Verfahren wurde erfolgreich in einer und quasi-zwei Raumdimensionen (mit einer festgehaltener Variable) angewandt und wird nun auch im Rahmen eines lokalen Verfahrens, nämlich der Spektrale-Differenzen-Methode, untersucht.
Die konjugierte Fourier-Partialsumme in zwei Raumdimensionen ist nicht eindeutig bestimmt, sondern kann bezüglich je einer oder zwei Variablen gebildet werden. Bisherige Resultate wurden stets auf die konjugierten Partialsummen in einer Variablen zurückgeführt, wobei auch die konjugierte Partialsumme in zwei Variablen Informationen über Sprungunstetigkeiten, und zwar in den gemischten partiellen Ableitungen, liefert. Daher wird in der vorliegenden Arbeit die Konvergenz verallgemeinerter konjugierter Partialsummen in zwei Variablen untersucht und es werden entsprechende Konvergenzresultate bewiesen.
Ein Problem bei der Nutzung von Fourier-Partialsummen zur Kantendetektierung bei Verfahren, die *nicht* auf der Rekonstruktion mit Fourierreihen beruhen, ist die Bestimmung der Fourierkoeffizienten aus den vorhandenen diskreten Daten oder modalen Koeffizienten des Verfahrens. Eine Interpolation an den für die Fourierkoeffizienten benötigten Stellen führt einen zusätzlichen Fehler ein, der die Qualität der Lösung erheblich verschlechtern kann. Aus diesem Grund wird eine direkte und für die jeweilige Ordnung n *exakte* Umrechnungsformel der Fourierkoeffizienten aus den PKD-Koeffizienten bewiesen und im Rahmen der Spektrale-Differenzen-Methode angewandt.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt. Kapitel 2 beginnt mit einem kurzen Abriss der benötigten Grundlagen aus dem Bereich der hyperbolischen Erhaltungsgleichungen und numerischen Verfahren. Weiterhin werden einige für den weiteren Verlauf wichtige Polynombasen sowie ihre Eigenschaften erläutert.
Das dritte Kapitel behandelt die Spektrale-Differenzen-Methode, wobei zunächst der klassischen Ansatz vorgestellt und dann auf den Gebrauch allgemeiner eindimensiona-

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

ler Basispolynome, insbesondere der PKD-Basis, erweitert wird. Daran schließen sich einige Details zur tatsächlichen Implementierung der numerischen Flüsse an den Zellenrändern sowie ein kurzer Laufzeitvergleich der verschiedenen Varianten der Methode an. In Abschnitt 3.4 wird die Problematik der Stabilität des Spektrale-Differenzen-Verfahrens angesprochen. Abschnitt 3.5 legt einen kürzlich vorgestellten stabilen Ansatz mit zweidimensionalen Basispolynomen dar, der jedoch ad hoc nicht auf beliebig hohe Ordnungen erweiterbar ist.
Kapitel 4 beinhaltet Grundlagen und Zusammenhänge im Bereich der modalen Filterung, insbesondere auch die Beziehung modaler Filter zur Spektrale-Viskosität-Methode. Diese Resultate werden dann in Abschnitt 4.3 auf die Filterung in der PKD-Basis erweitert. Zudem wird sowohl die Problematik der adaptiven Filterung als auch die Nutzung im Spektrale-Differenzen-Verfahren angesprochen.
Im fünften Kapitel erörtern wir den Aspekt der Kantendetektierung mithilfe konjugierter Fourierreihen und die Anwendbarkeit auf lokale Verfahren wie die Spektrale-Differenzen-Methode. Nach Einführung einiger grundlegender Resultate für konjugierte Fourier-Partialsummen wird die Kantendetektierung mit verallgemeinerten konjugierten Partialsummen in einer Dimension sowohl für exakte als auch diskrete Fourierkoeffizienten erläutert. Abschnitt 5.3 behandelt die zweidimensionale Kantendetektierung und insbesondere die Konvergenzbeweise der konjugierten Partialsummen in zwei Variablen. Eine Herleitung zur direkten Bestimmung der Fourierkoeffizienten aus den PKD-Koeffizienten zur Nutzung im Rahmen der Spektralen Differenzen Methode wird in Abschnitt 5.4 ausgearbeitet. Abschnitt 5.5 umfasst Testfälle zur zweidimensionalen Kantendetektierung der verallgemeinerten konjugierten Partialsummen in zwei Variablen und Vergleiche zu bisherigen Ergebnissen.
Im sechsten Kapitel werden die numerischen Ergebnisse mit der Spektrale-Differenzen-Methode vorgestellt. Diese beinhalten sowohl stoßfreie Testfälle, die zur Ordnungsanalyse genutzt werden, als auch stoßbehaftete Tests, in denen die Wirkung der modalen Filterung demonstriert wird. In Abschnitt 6.3 kommt schließlich die Kantendetektierung basierend auf den Fourierreihen zum Einsatz und wird mit dem bisher genutzten Stoßindikator verglichen. Hier wird ebenfalls ein möglicher globaler Einsatz der Detektierung diskutiert.
Kapitel 7 schließt die Arbeit mit einer Zusammenfassung der erzielten Ergebnisse und einem Ausblick auf zukünftige Fragestellungen ab.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

2 Grundlagen: Erhaltungsgleichungen und orthogonale Polynome

In diesem Kapitel führen wir die benötigten Grundlagen und Begrifflichkeiten in den Bereichen hyperbolischer Erhaltungsgleichungen sowie orthogonaler Polynome ein und geben außerdem einen kurzen Überblick über einige numerische Lösungsverfahren, die eine Einordnung der Spektrale-Differenzen-Methode ermöglichen. Für eine ausführlichere Darstellung seien dem Leser insbesondere die Grundlagenbücher [36, 37, 68, 2, 17, 35] für Abschnitt 2.1 und 2.2 sowie [14, 19, 61, 15, 58] für Abschnitt 2.3 empfohlen.

2.1 Hyperbolische Erhaltungsgleichungen

Wir befassen uns in dieser Arbeit mit Lösungsverfahren für die Klasse der hyperbolischen Erhaltungsgleichungen, einem Teilgebiet der partiellen, nichtlinearen Differentialgleichungen. Diese modellieren zum Beispiel Masse- oder Energieerhaltung und werden üblicherweise in der Erhaltungsform (oder konservativen Form)

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla \cdot \mathcal{F}\left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\right) = 0 \tag{2.1.1}$$

dargestellt, wobei $\boldsymbol{u} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^m$ der m-dimensionale Vektor der Erhaltungsvariablen und $\mathcal{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m\times d}$ ein von $\boldsymbol{u}$ abhängiger Fluss ist. Dabei bezeichnet d die Raumdimension, m die Anzahl der Erhaltungsgleichungen des Systems und $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d}\right)^T$ den formalen Nabla-Operator. Handelt es sich nur um eine einzelne Erhaltungsgleichung, also $m = 1$, ist u die einzige Erhaltungsvariable.
Bei der nichtkonservativen Form wird Gleichung (2.1.1) als System von äquivalenten Gleichungen so umgeschrieben, dass sie nicht mehr als Divergenz eines Flusses $\mathcal{F}$ geschrieben werden kann. Ein Beispiel dafür ist die Burgers-Gleichung in einer Raumdimension, gegeben durch $u_t + uu_x = 0$ in nichtkonservativer und $u_t + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2\right) = 0$ in konservativer Form.
Typischerweise werden Anfangsbedingungen $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0)$ und gegebenenfalls auch Randbedingungen an die Erhaltungsvariablen gestellt, die widerspruchsfrei zum zugrunde liegenden Problem gesetzt sein müssen. Trotz glatter Anfangsdaten können Lösungen von Erhaltungsgleichungen Unstetigkeiten entwickeln, so dass die Existenz einer klassischen Lösung nicht gewährleistet ist. Weiterhin erschwert diese Eigenschaft das Auffinden physikalisch korrekter Lösungen aufgrund von auftretenden Oszillationen in der Nähe der Unstetigkeitsstellen, was in Kapitel 5 näher erläutert wird.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Zunächst betrachten wir einige klassische Beispiele von Erhaltungsgleichungen inklusive ihrer exakten Lösungen, die unter anderem in Kapitel 6 als Testfälle der Spektrale-Differenzen-Methode genutzt werden.

Beispiel 2.1.1. Seien $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$ und $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Die Transportgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{b} \cdot \nabla u(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}_0^+, \tag{2.1.2}$$

zur Anfangsbedingung $u(\boldsymbol{x}, 0) = g(\boldsymbol{x})$ besitzt die exakte Lösung

$$u(\boldsymbol{x}, t) = g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}t).$$

Beweis: Die Behauptung folgt direkt mit der Methode der Charakteristiken: Wir betrachten die Hyperebene $\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{b}t = g(\boldsymbol{x}_0)$. Mit $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{b}$ folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u(\boldsymbol{x}(t), t) &= \nabla u(\boldsymbol{x}(t), t) \cdot \boldsymbol{x}'(t) + \frac{\partial u(\boldsymbol{x}(t), t)}{\partial t} \cdot 1 \\
&= \boldsymbol{b} \cdot \nabla u(\boldsymbol{x}(t), t) + \frac{\partial u(\boldsymbol{x}(t), t)}{\partial t} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Somit ist die Lösung konstant entlang der Geraden $\boldsymbol{x}(t) = g(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{b}t$. □

Die Idee der Methode der Charakteristiken besteht im Allgemeinen darin, sogenannte charakteristische Kurven oder kurz **Charakteristiken** zu finden, auf denen die partielle Differentialgleichung auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt und so mithilfe klassischer Theorie explizit gelöst werden kann. Eine erweiterte Einführung findet sich zum Beispiel in [16]. Bei der Transportgleichung sind die Charakteristiken parallele Geraden, so dass die Anfangsbedingung lediglich in der Zeit transportiert wird (Abbildung 2.1). Im Gegensatz dazu können sich die Charakteristiken im nächsten Beispiel schneiden, so dass selbst bei glatten Anfangsbedingungen Unstetigkeiten auftreten können.

Beispiel 2.1.2. Wir betrachten die eindimensionale Burgers-Gleichung

$$u_t(x, t) + u(x, t) u_x(x, t) = 0$$

mit der glatten Anfangsbedingung $u(x, 0) = \sin(x)$. Dann ist die Lösung konstant entlang der Charakteristiken $x(t) = x_0 + \sin(x_0)t$. Diese sind Geradem mit einer vom Anfangswert x_0 abhängigen Steigung, so dass sich unter anderem die Charakteristiken $x(t) = \pi$ (im Punkt $x_0 = \pi$) und $x(t) = \frac{\pi}{2} + t$ (für $x_0 = \frac{\pi}{2}$) im Punkt $(x, t) = (\pi, \frac{\pi}{2})$ schneiden. Daher kann hier keine klassische Lösung existieren (vergleiche Abbildung 2.2).

Dieses Beispiel zeigt zwar die Nichtexistenz von differenzierbaren Lösungen, doch können auch reale physikalische System Lösungen entwickeln, die so starke Änderungen aufweisen, dass sie unstetig wirken. Daher ist es sinnvoll den klassischen Lösungsbegriff zu

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

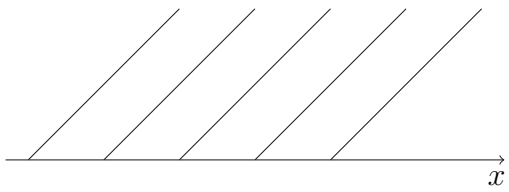


Abbildung 2.1 Charakteristiken der Transportgleichung.

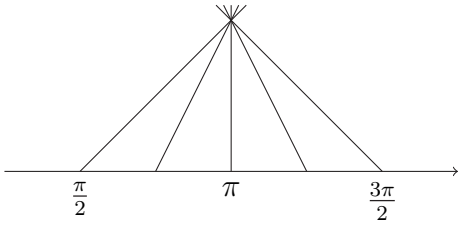


Abbildung 2.2 Charakteristiken der Burgers-Gleichung aus Beispiel 2.1.2.

verallgemeinern: Wir multiplizieren die Erhaltungsgleichung 2.1.1 für $m = 1$ mit einer Testfunktion $\psi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+)$ und integrieren bezüglich Ort und Zeit,

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} \left[u_t(\boldsymbol{x}, t) + \nabla \cdot \mathcal{F}\left(u(\boldsymbol{x}, t)\right)\right] \psi(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t = 0.$$

Anwendung der Green'schen Formeln liefert dann

$$\begin{aligned} 0 = &- \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} \left[u(\boldsymbol{x}, t)\psi_t(\boldsymbol{x}, t) + \nabla\psi \cdot \mathcal{F}\left(u(\boldsymbol{x}, t)\right)\right] \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \\ &+ \int_{\partial G} \left[u(\boldsymbol{x}, t)n_t + \mathcal{F}\left(u(\boldsymbol{x}, t)\right) \cdot (n_1, \dots n_d)^T\right] \psi(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

wobei $(n_1, \dots, n_d, n_t)$ ein äußerer Normalenvektor an ein Lipschitz-Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ mit $\operatorname{supp} \psi \subseteq \overline{G}$ ist. Da ψ einen kompakten Träger besitzt und somit auf dem Rand von G für $t > 0$ verschwindet, bleibt im zweiten Integral nur der Anteil für $(\boldsymbol{x}, 0) \in \partial G$ übrig. Ein äußerer Normalenvektor ist hier durch $(0, \dots, 0, -1)$ gegeben, so dass mit dem Einsatz der Anfangsbedingung $u(\boldsymbol{x}, 0) = u_0(\boldsymbol{x})$ schließlich

$$0 = - \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} \left[u(\boldsymbol{x}, t)\psi_t(\boldsymbol{x}, t) + \nabla\psi(\boldsymbol{x}, t) \cdot \mathcal{F}\left(u(\boldsymbol{x}, t)\right)\right] \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}, 0)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad (2.1.3)$$

folgt. Diese Gleichung gilt nicht nur für klassische Lösungen u, sondern bereits für $u, u_0 \in L^\infty_{\mathrm{loc}}$ auf den benötigten Gebieten. Dies motiviert folgende Definition.

Definition 2.1.3. Eine Funktion $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+)$ heißt **schwache Lösung** von (2.1.1) zu Anfangsbedingungen $u_0 \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, wenn Gleichung (2.1.3) für alle $\psi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+)$ erfüllt ist.

Diese Definiton lässt sich analog auf Systeme mit $m > 1$ (mit $\boldsymbol{u} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+)^m$ beziehungsweise $\boldsymbol{u}_0 \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)^m$) übertragen. In diesem Zusammenhang betrachten wir das sogenannte **Riemann-Problem**, bei dem zu einer Erhaltungsgleichung stückweise konstante Daten mit einem Sprung vorgegeben werden.

Beispiel 2.1.4. Sei die eindimensionale Burgers-Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit dem Anfangsdatum

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_\ell, & \text{falls } x < 0, \\ u_r, & \text{falls } x \geq 0, \end{cases}$$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

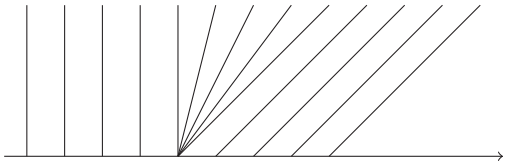


Abbildung 2.3 Verdünnungswelle.

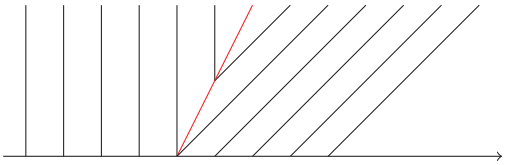


Abbildung 2.4 Entropie-verletzende Stoßwelle.

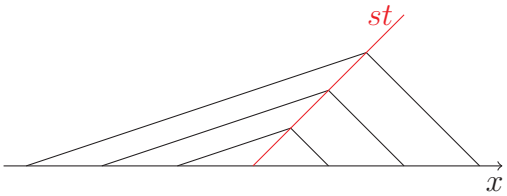


Abbildung 2.5 Schwache Lösung für $u_\ell > u_r$, Stoß in Rot.

mit $u_\ell, u_r \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Lösung ist abhängig vom Verhältnis der Werte u_ℓ und u_r zueinander, so dass zwei Fälle unterschieden werden. Ist $u_\ell > u_r$, dann existiert eine eindeutige schwache Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} u_\ell, & \text{falls } x < st, \\ u_r, & \text{falls } x \geq st, \end{cases}$$

wobei $s = \dfrac{u_\ell + u_r}{2}$ die zugehörige **Stoßgeschwindigkeit** ist. Im Fall $u_\ell < u_r$ existieren unendlich viele schwache Lösungen (siehe Abbildungen 2.3 und 2.4). Dabei ist die **Verdünnungswelle** die physikalisch korrekte, sogenannte **Entropie-Lösung**[1].

Im allgemeinen Fall einer Erhaltungsgleichung der Form $u_t + \nabla \cdot f(u) = 0$ (in einer Raumdimension) mit dem Fluss $f(u)$ können wir die Stoßgeschwindigkeit s mithilfe der **Rankine-Hugeniot-Sprungbedingung**

$$f(u_\ell) - f(u_r) = s(u_\ell - u_r) \tag{2.1.4}$$

bestimmen (Herleitung siehe [36]). Dies ist die einzig mögliche Geschwindigkeit, mit der sich ein Stoß fortbewegen kann, um eine schwache Lösung der Erhaltungsgleichung zu sein. Im Fall eines linearen Systems mit dem Fluss $f(u) = Au$ und einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ erhalten wir die Bedingung $A(u_\ell - u_r) = s(u_\ell - u_r)$, das heißt $u_\ell - u_r$ muss ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert s sein. Dies muss bei der Konstruktion von sogenannten Riemann-Lösern berücksichtigt werden, die ein gegebenes Riemann-Problem lösen und noch im weiteren Verlauf bei den numerischen Lösungsverfahren in Abschnitt 2.2 und Kapitel 3 benötigt werden.

Die in Beispiel 2.1.2 und 2.1.4 vorgestellte Burgers-Gleichung ist die einfachste nichtlineare Erhaltungsgleichung, bei der sich bereits Unstetigkeiten entwicklen können. Ein

[1] Der Name entspringt der Tatsache, dass die Gesamtentropie eines physikalischen Systems nicht fällt.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

komplexeres Modell sind die **Euler-Gleichungen**, ein System aus nichtlinearen Erhaltungsgleichungen, die sich physikalisch aus der Erhaltung von Masse, Impuls und Energie zusammensetzen. In zwei Raumdimensionen sind sie gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho E\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uH\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho vH\end{pmatrix}=0. \tag{2.1.5}$$

Dabei wird $\boldsymbol{u}=(\rho,\rho u,\rho v,\rho E)^T$ als Vektor der konservativen Variablen bezeichnet, während die Dichte ρ, die Geschwindigkeit in x-Richtung u beziehungsweise in y-Richtung v sowie der Druck p physikalische Variablen sind. Die Energie E steht in Relation zur Enthalpie H durch $H=E+\frac{p}{\rho}$ und

$$p=\rho(\gamma-1)\left(E-\frac{u^2+v^2}{2}\right). \tag{2.1.6}$$

Die letzten beiden Modelle sind im physikalischen Sinn bereits vereinfachte Formen, bei denen mindestens die innere Reibung des Fluids, die sogenannte **Viskosität**, vernachlässigt wurde. So entsprechen die Euler-Gleichungen den Navier-Stokes-Gleichungen ohne Berück-sichtigung der erwähnten Viskosität sowie der Wärmeleitung, während sich die viskose Burgers-Gleichung

$$u_t+uu_x=\varepsilon u_{xx} \tag{2.1.7}$$

liest. Diese Viskositätsterme sind zwar verschwindend klein für kleines $\varepsilon>0$, haben aber einen großen Einfluss auf die Eigenschaften der Lösungen, wie in Abbildung 2.6 ersichtlich ist: Jede Lösung der viskosen Gleichung ist stetig, nähert sich aber für $\varepsilon\to 0$ der unstetigen Lösung der nichtviskosen Gleichung an. In den physikalisch komplexeren Modellen existieren also keine unstetigen Lösungen, sondern lediglich sehr große beziehungsweise kleine Gradienten, was bei der Konstruktion numerischer Lösungsverfahren zu berücksichtigen ist.

2.2 Numerische Verfahren

Zur numerischen Lösung der in Abschnitt 2.1 vorgestellten hyperbolischen Erhaltungsgleichungen gibt es eine Vielzahl an Möglichkeiten, wobei hier sowohl Systeme, das heißt $\boldsymbol{u}:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ mit $m>1$, als auch einfache Gleichungen, also $m=1$, betrachtet werden sollen. Einen guten Überblick verschiedener räumlicher und zeitlicher Diskretisierungsmöglichkeiten höherer Ordnung bietet zum Beispiel der Übersichtsartikel [71].
Sei nun ein Definitionsbereich $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ gegeben, auf der die in differentieller Form vorliegende Erhaltungsgleichung

$$\boldsymbol{u}_t(\boldsymbol{x},t)=-\nabla\cdot\mathcal{F}\left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\right) \tag{2.2.1}$$

für $\boldsymbol{x}\in\Omega$, $t>t_0$ für ein $t_0\in\mathbb{R}$ und eine Flussfunktion $\mathcal{F}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m\times d}$ numerisch gelöst werden soll.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

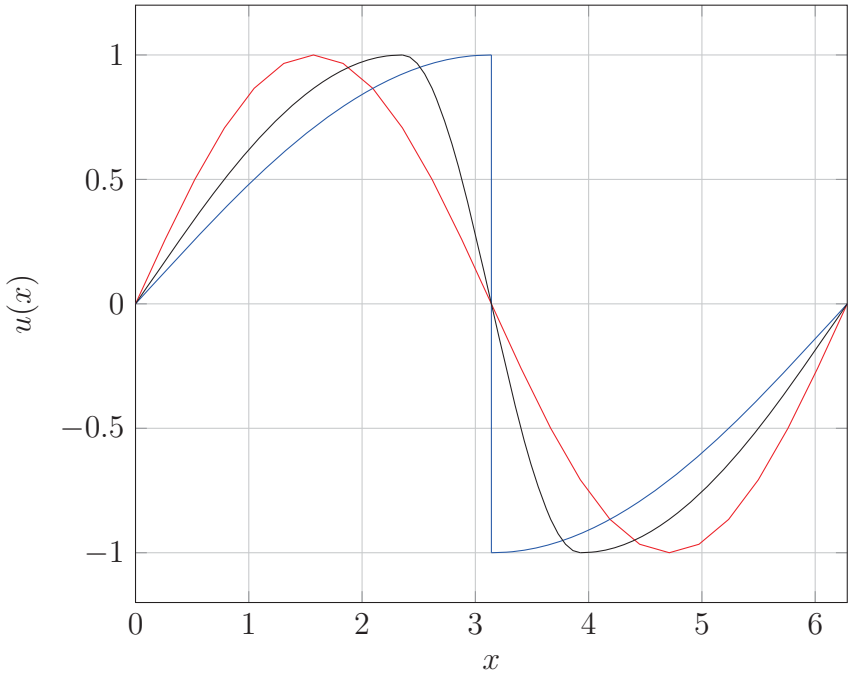


Abbildung 2.6 Lösung u zur Zeit $t = \frac{\pi}{2}$ der inviskosen (blau) und viskosen Burgers-Gleichung für ein $\varepsilon > 0$ (schwarz), Anfangsbedingung in rot.

2.2.1 Zeitdiskretisierung

Betrachten wir Gleichung (2.2.1) für festgehaltenes $\boldsymbol{x}$ lediglich als Differentialgleichung in t, haben wir es mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung zu tun, für die verschiedene Lösungsansätze bekannt sind. Diese werden auch als **Zeitintegration** bezeichnet. Einer der bekanntesten Ansätze ist das explizite Euler-Verfahren, das einfach der Integration der Gleichung bezüglich t entspricht. Dazu wird das Zeitintervall diskretisiert, das heißt es werden Werte U^k zum Zeitpunkt t_k berechnet, die die Gleichung

$$U^{k+1}(\boldsymbol{x}) = U^k(\boldsymbol{x}) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} -\nabla \cdot \mathcal{F}\left(U^k(\boldsymbol{x})\right) \, \mathrm{d}t$$

erfüllen, wobei $U^0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_0)$ einer vorgegebenen Anfangsbedingung entspricht. Werden zur Bestimmung der Werte U^{k+1} im $(k+1)$-ten Zeitschritt lediglich Daten aus den vorhergehenden Zeitpunkten t_0 bis t_k, also U^0 bis U^k benötigt, spricht man von **expliziter** Zeitintegration, anderenfalls von **impliziter** Zeitintegration. U^{k+1} heißt auch das **Update** von $\boldsymbol{u}$. Die explizite Zeitintegration ist im Allgemeinen einfacher zu implementieren, hat aber den Nachteil, dass aufgrund gewisser Stabilitätsbedingungen häufig sehr kleine Zeitschritte gewählt werden müssen. Die Größe der Zeitschritte kann man mithilfe der sogenannten CFL-Zahl bestimmen, die in Abschnitt 2.2.4 näher erläutert wird. Im Gegensatz dazu können bei den impliziten Methoden größere Zeitschritte gewählt werden, wobei hier aber die Berechnung von U^{k+1} im neuen Zeitschritt häufig wesentlich komplizierter ist, so dass viele Praxisanwendungen explizite Zeitschrittverfahren bevorzugen.
In dieser Arbeit beschränken wir uns ebenfalls auf die explizite Zeitintegration und insbesondere auf klassische Runge-Kutta-Verfahren. Diese Einschrittverfahren sind in zahl-

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

reichen Werken [25, 56] dokumentiert und werden häufig mithilfe von Butcher-Tableaus [8] angegeben. Da die Wahl eines angemessenen Zeitschrittverfahrens ein eigenständiges Forschungsgebiet ist, beschränken wir uns lediglich auf ein bekanntes und erprobtes Zeitintegrationsverfahren möglichst hoher Ordnung (mehr zu Ordnungen siehe Abschnitt 2.2.3), so dass wir auch in der Zeit eine gute Konvergenzrate erzielen können. Dafür wählen wir ein TVB[2]-Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung mit geringem Speicherbedarf aus [11], welches sich für $\mu = 4$ schreiben lässt als

$$\begin{aligned}
U^{(0)} &= U^k, \\
V^{(j)} &= A_j V^{(j-1)} + \Delta t L\left(U^{(j-1)}, t^n + c_j \Delta t\right), && A_0 = 0, j = 1, \dots \mu, \\
U^{(j)} &= U^{(j-1)} + B_j V^{(j)}, && j = 1, \dots \mu, \\
U^{k+1} &= U^{(\mu)},
\end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
A_0 &= 0 & B_0 &= \frac{1232997174477}{9575080441755} & c_0 &= 0 \\
A_1 &= -\frac{567301805773}{1357537059087} & B_1 &= \frac{5161836677717}{13612068292357} & c_1 &= \frac{1432997174477}{9575080441755} \\
A_2 &= -\frac{2404267990393}{2016746695238} & B_2 &= \frac{1720146321549}{2090206949498} & c_2 &= \frac{2526269341429}{6820363962896} \\
A_3 &= -\frac{3550918686646}{2091501179385} & B_3 &= \frac{3134564353537}{4481467310338} & c_3 &= \frac{2006345519317}{3224310063776} \\
A_4 &= -\frac{1275806237668}{842570457699} & B_4 &= \frac{2277821191437}{14882151754819} & c_4 &= \frac{2802321613138}{2924317926251}.
\end{aligned}$$

2.2.2 Räumliche Diskretisierungen

Die numerischen Werte $U^k(\boldsymbol{x})$ können im Allgemeinen nicht explizit angegeben werden, so dass eine Ortsdiskretisierung unabdingbar ist. Wozu die Diskretisierungspunkte $\boldsymbol{x}_j \in \Omega$ genutzt werden, unterscheidet die einzelnen Verfahren stark voneinander. Bei **nodalen** Verfahren wird das Update der Lösung direkt an den Stützstellen durchgeführt, das heißt $U^{k+1}(\boldsymbol{x}_j)$ berechnet. Bei **modalen** Verfahren hingegen werden aus den Werten an den gegebenen Stützstellen Koeffizienten $\hat{\boldsymbol{u}}_\ell$ in einer anderen Basis, zum Beispiel Fourierkoeffizienten, berechnet und die numerische Lösung im nächsten Zeitschritt dann in diesem Raum bestimmt. Allgemeiner wird auch von **spektralen** Verfahren gesprochen, sobald eine Reihenentwicklung

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x}) = \sum_{\ell=1}^{N} \hat{\boldsymbol{u}}_\ell \phi_\ell(\boldsymbol{x}) \tag{2.2.2}$$

als Lösungsansatz gewählt wird, wobei $\{\phi_0, \dots, \phi_N\}$ Basis eines Funktionenraums auf Ω (zum Beispiel $L^2(\Omega)$) und $\hat{\boldsymbol{u}}$ der m-Vektor aus den entsprechenden Koeffizienten ist.

[2] *Total-Variation-Bounded*

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.